احتمالات

پیدایش رسمی احتمال از قرن هفدهم به عنوان متدی برای محاسبه شانس در بازیهای قمار بوده است. اگر چه ایده های احتمال شانس و تصادفی بودن از تاریخ باستان در رابطه با افسونگری و بخت آزمایی و بازیهای شانسی و حتی در تقسیم کار بین راهبان در مراسم مذهبی وجود داشته است و به علاوه شواهدی از بکارگیری این ایده ها در مسایل حقوق، بیمه، پزشکی و نجوم نیز یافت میشود، اما بسیار عجیب است که حتی یونانیان اثری از خود در رابطه با استفاده از تقارنی که در هندسه بکار می برده اند در زمینه احتمال یا اصولی که حاکم بر مسایل شانس باشد بجا نگذاشته اند.

ارسطو پیشامدها را به سه دسته تقسیم می نمود:

۱) پیشامدهای قطعی که لزوماً اتفاق می افتادند.

۲) پیشامدهای احتمالی که در بیشتر موارد اتفاق می افتادند.

۳) پیشامدهای غیر قابل پیش بینی و غیر قابل شناسایی که فقط با شانس محض رخ میدهند.اما ارسطو به تعبیرهای مختلف احتمال اعتقاد نداشته و فقط احتمال شخصی که مربوط به درجه اعتقاد افراد نسبت به وقوع پیشامدهاست را معتبر می دانسته است.

پاسکال و فرما اولی کسانی هستند که در اوایل قرن هفدهم مسایل مربوط به بازیهای شانسی را مورد مطالعه قرار دادند و این دو نفر به عنوان بنیانگزاران تیوری ریاضی احتمال لقب گرفته اند. دانشمندانی از قبیل هی گنز کارهای آنها را ادامه داده و ویت و هلی این مسایل را در آمارهای اجتماعی بکار گرفتند. این علم جدید نخستین نقطه اوج خود را در اثر مشهوری از ژاکوب برنولی بدست آورد. در این اثر علاوه بر تعریف کلاسیک احتمال ریاضی، اساس خاصی از قانون اعداد بزرگ و کاربردهای احتمال در آمارهای اجتماعی نیز مطرح شده است.

در قرن هجدهم متفکران بزرگی چون دی مور، دانیل برنولی، آلمبرت، اویلر، لاگرانژ، بیز، لاپلاس و گاوس قسمتی از وقت خود را به این علم جدید اختصاص دادند. بیز در سال ۱۷۶۳ قانون معروف بیز را ارایه می دهد و لاپلاس در نوشته ای تمام موضوع علم احتمال را جمع آوری می کند. مهمترین قضایای حدی که در محاسبات احتمالی بکار می رفته و تاثیر احتمال در ریاضی، فیزیک، علوم طبیعی، آمار، فلسفه و جامعه شناسی در این اثر جمع آوری شده است

با مرگ لاپلاس در سال ۱۸۷۲ اوج پیشرفت این علم به اتمام رسید و علی رغم برخی تلاشهای فردی که ماحصل آنها کشف قضایایی چون قضیه اعداد بزرگ پواسون و یا نظریه خطاهای گاوس بود، بطور کلی احتمال کلاسیک ارتباط خود را با مسایل تجربی و علمی از دست میدهد. اما جریانهای متقابل ظاهر می شوند. به موازات پیشرفت نظریه ریاضی یک نظریه آمار به عنوان کاربردهایی از احتمال بوجود می آید. این نظریه در رابطه با مسایل مهم اجتماعی از قبیل اداره داده های آماری، مطالعه جمعیت و مسایل بیمه بکار می رفته است. اساس کار توسط افرادی چون کوتلت و لکسیز ریخته شده و توسط دانشمندانی چون فشنر(روانشناس)، تیله و برانز(منجمان)، گالتون و پیرسون(زیست شناسان) پیشرفت نموده است. این کارها در اواخر قرن نوزدهم در جریان بوده و در انگلستان و برخی دیگر از کشورها حرفه حسابگری، به مفهوم آماردانی که از اقتصاد و ریاضی هم اطلاعاتی دارد و در جمعیت شناسی و بیمه خبره می شود، رونق می یابد. از طرف دیگر فرمولهای کلاسیک ایده های احتمال میز مسیر

پیشرفت و کاربردی خود را ادامه میدادند. در این قرن در تلاش برای روشن سازی پایه منطقی کاربردهای احتمال، وان میزز یک فرمولبندی جدید برای محاسباتاحتمالی ارایه میدهد که نه تنها از نظر منطقی سازگار بوده بلکه نظریه ریاضی و تجربی پدیده های آماری در علوم فیزیکی و اجتماعی را پایه گذاری می نماید.
مدل کلاسیک احتمال توسط برنولی و لاپلاس معرفی شد. این مدل به دلیل فرض همطرازی و عدم امکان تکرار در شرایط یکسان و دلایل دیگر با اشکالاتی روبروست که بسیاری از پدیده های طبیعی بر آن منطبق نیستایده های اساسی نظریه تجربی احتمال که قرار دادن فراوانی نسبی بجای احتمال است در سال ۱۸۷۳ توسط پواسون ارایه گردید.
بسیاری از مسایل احتمال حتی قبل از بیان اصول آن توسط کلموگرف در سال ۱۹۳۳، با ابزارهای تجربی و حتی نظری توسط دانشمندان مطرح شده است. ولی کلموگرف با بیان اصول احتمال پایه این علم و ارتباط دقیق آنرا با مباحث ریاضی مستحکم می نماید.
در این زمان احتمال به عنوان یکی از شاخه های ریاضی، نه تنها کلیه ابزارهای ریاضی را جهت پیشرفت خود بکار می گیرد، بلکه توانسته کاربردهایی را در حل برخی از مسایل ریاضی داشته باشد. نظریه احتمالی اعداد، نظریه احتمالی ترکیبیاتی و کاربردهای شاخص احتمال در برخی از مسایل آنالیز، بعضی از کاربردهای احتمال در ریاضی هستند.
از طرف دیگر احتمال به عنوان زیربنای ساختاری و اصول ریاضی علم آمار، در جهت پیشرفت این علم و قوام بخشی به دستورات آن نقشی اساسی دارد.
مسایل جالب احتمال هندسی و نظریه احتمالی اعداد، شمه ای از زیبایی های احتمال است که همه اینها با هم زیبایی، کارآیی و توان علم احتمال را نشان میدهند. دهند...مفهوم احتمال در مورد ارتباط یا پیوند دو متغیر به کار می‌رود، به این معنی که ارتباط یا پیوند آنها به صورتی است که حضور، شکل، وسعت و اهمیت هر یک وابسته به حضور، شکل، و اهمیت دیگری است. این مفهوم به صورت محدودتر و در مورد ارتباط دو متغیر کمّی نیز به کار برده می‌شود[۲].ریاضی‌دانان عددی بین صفر و یک را به عنوان احتمال یک رویداد تصادفی به آن نسبت می‌دهند. رویدادی که حتما رخ دهد، احتمالش یک است و رویدادی که اصلاً ممکن نیست رخ دهد احتمالش صفر است[۳]. احتمال شیر آوردن در پرتاب یک سکه سالم است، همانطور که احتمال خط آوردن هم است. احتمال این‌که پس از انداختن یک تاس سالم شش بیاوریم است.به زبان ساده ریاضی احتمال، نسبت تعداد اعضای مجموعه پیشامدهای دلخواه به تعداد اعضای مجموعه تمام پیشامدهای ممکن است. مثلاً در مورد تاس، برای محاسبه احتمال آوردن عددی زوج، مجموعه پیشامدهای ممکن هست: {۱،۲،۳،۴،۵،۶} و مجموعه پیشامدهای دلخواه هست: {۲،۴،۶}. تعداد اعضای مجموعه دلخواه هست ۳ و تعداد اعضای مجموعه پیشامدهای ممکن هست ۶. پس احتمال هست: جمع احتمال رخ دادن یک رویداد با احتمال رخ دادن رویداد مکمل آن، عدد یک می‌شود. مثلاً در تاس ریختن جمع "احتمال آوردن شش" (که است) با "احتمال نیاوردن شش" (که است) می‌شود یک.

معرفی بزرگان احتمالات

چبیشف در ۱۶ ماه مه ۱۸۲۱ در "اکتاوو"، روستایی کوچک در روسیه غربی، در غرب مسکو متولد شد.هنگام تولد او پدرش از ارتش بازنشسته شده بود، اما اخیرآ در زندگی نظامی اش بعنوان افسر مقابل نیروهای متجاوز ناپلئون جنگیده بود. چبیشف در خانواده ای کوچک که جزئی از خانواده ای بزرگ با تاریخچه ای جالب توجه به دنیا آمد.والدین اش ۹ فرزند داشتند که برخی از آنها شغل پدرشان را پیش گرفتند.

تحصیلات ابتدایی او در خانه شکل گرفت . وی در منزل توانایی های اولیه خواندن، زبان فرانسه و حساب را یاد گرفت.بعدها زبان فرانسه برای او بسیار سودمند بود چون توانست با تکیه بر آن فرانسه را از نزدیک ببیند و ریاضیات پیچیده را به فرانسوی در همانجا بخواند. همین طور زبان فرانسوی بین ریاضیدانان پیشرو اروپایی زبان ارتباطی مؤثری بود.

در سال ۱۸۳۲ وقتی یازده ساله بود، خانواده اش به مسکو رفتند.در آنجا او درس خواندن را در خانه ادامه داد ولی در آن زمان توسط پی.ان.پاگورلسکی- کسی که به بهترین مدارس ابتدایی آموزش ریاضیات در مسکو رسیدگی می کرد- در ریاضیات آموزش داده می شد. پاگورلسکی نویسنده بعضی از مشهورترین کتب درسی ریاضی مدارس ابتدایی در آن زمان و به طور قطع ریاضیات را به دانش آموزان القا می کرد و به آنها آموزش قوی ای از ریاضیات می داد.بنابراین، چبیشف خیلی خوب برای درس خواندن در علوم ریاضیات آماده شد وقتی که در سال ۱۸۳۷ به دانشگاه مسکو- این دانشگاه در سال ۱۷۵۵تأسیس شد- رفت.

در دانشگاه مسکو کسی که تأثیر زیادی بر چبیشف گذاشت "نیکولای مترویوچ برشمن"- پروفسور ریاضیات کاربردی در دانشگاه مسکو از سال ۱۸۳۴- بود. چبیشف همیشه به تأثیر بزرگ برشمن بر خود هنگام تحصیل در دانشگاه اعتراف می کرد و او را مهمترین عامل در رسیدن به نتایج تحقیقاتش عنوان می کرد.

دپارتمان فیزیک و ریاضی در دانشگاه او در سال تحصیلی ۴۱-۱۸۴۰ یک مسابقه برگزار کرد و چبیشف در مقاله ای(y=f(x را با استفاده از بسط سری ها برای توابع معکوس پذیر حل کرد ولی مقاله او در آن زمان تنها جایزه دوم را به خود اختصاص داد و در سال ۱۹۵۰ منتشر شد. چبیشف در سال ۱۸۴۱ فارغ التحصیل شد و تحصیلات خود را در فوق لیسانس تحت حمایت استاد محبوبش "برشمن" ادامه داد.

اولین مقاله او به زبان فرانسه،در رابطه با انتگرالهای چندگانه ،در سال۱۸۴۳ درمجله "liouvill" منتشر شد. دومین مقاله او نیز به زبان فرانسه بود و این بار در سال ۱۸۴۴ در مجله "crelle" به چاپ رسید. این مقاله در رابطه با همگرایی سری تیلور بود.

در تابستان ۱۸۴۶ چبیشف در حال رسیدگی به رساله دکترای خود بود و در همان سال مقاله ای در مجله crelle بر پایه رساله خود منتشر کرد. رساله او در زمینه تئوری احتمال بود و در آن نتایج حاصل از تئوری احتمال را توسعه داد ولی با روشی ابتدایی.ناگفته نماند که رساله چبیشف تا پس از مرگ او به چاپ نرسید ولی او مقاله ای در رابطه با نتایج آن را در سال ۱۸۵۳ به چاپ رساند.

او همچنین در زمینه تئوری اعداد نیز مقالاتی به چاپ رسانده است.از جمله کارهای ناتمام او نزدیک شدن به اثبات قضیه اعداد اول است.اثبات اینکه اگر (p(n تعداد اعداد اول کوچکتر یا مساوی n باشد در این صورت

حد p(n)logn/nوقتی n به سمت بی نهایت میل می کند برابر ۱ خواهد بود.او نمی توانست ثابت کند که این حد برابر یک است در حالیکه این حد وجود دارد. اثبات این قضیه ۲ سال بعد از مرگ او مستقلاً توسط "هدمرد" و " de la Vallee" ارائه شد.

همان طور که قبلاًگفته شد چبیشف تئوری احتمال را بیان کرد. در سال ۱۸۶۷ او مقاله ای در رابطه با مقدار میانی را که در آن از نابرابری Bienayme استفاده شده بود چاپ کرد. یکی از نتایج این کار او نابرابری ایست که امروزه به آن نابرابری چبیشف-بینیم گفته می شود. ۲۰ سال بهد چبیشف دو قضیه در رابطه با اختمال را منتشر کرد، یکی اساس بکاربردن تئوری احتمال در داده های آماری و دیگری عمومی کردن قضیه حد مرکزی دوموآور-لاپلاس.

و اما زندگی خصوصی او، او هرگز ازدواج نکرد و تنها در یک خانه بزرگ با ده اتاق زندگی می کرد و از نظر مالی بی نیاز بود. و سر انجام در ۸ دسامبر ۱۸۹۴ در سنت پترزبورگ در روسیه درگذشت. مارکوف، فارغ التحصیل دانشگاه سنت پترزبورگ در سال ۱۸۷۸ بود. وی در سال ۱۸۸۶ مدرک پروفسوری خود را دریافت کرد. کارهای زودهنگام مارکوف در تئوری اعداد، آنالیز، حدود انتگرال ها، همگرایی سری ها، دنباله کسرها و ... بسیار اساسی بود.

بعد از سال ۱۹۰۰ ، مارکوف تحت تأثیر استاد خود چبیشف، از روش دنباله های کسرها در تئوری احتمالات استفاده کرد.وی هم چنین در مورد رشته های متغیرهای وابسته متقابل، مطالعاتی انجام داد.با این امید ثابت کردن قوانین حدی در احتمالات در حالات کلی آنها.او قضیه حد مرکزی را با در نظر گرفتن فرض های کامل آن، اثبات کرد.

مارکوف به دلیل مطالعاتش پیرامون زنجیرهای مارکوف که رشته هایی از متغیرهای تصادفی هستند، معروف است.در زنجیرهای مارکوف، متغیر بعدی توسط متغیر کنونی مشخص می شود ولی از راهی که تا کنون طی شده است مستقل است.

در سال ۱۹۲۳ "نوربرت واینر" اولین کسی بود که پیرامون یک سلسله از این مراحل مارکوف شروع به بحثی جدی کرد.اساس یک تئوری اصلی در سال ۱۹۳۰ توسط کولموگروف فراهم شد.

مارکوف به شاعری هم علاقه مند بود و پیرامون ساختار شعری مطالعاتی انجام داد.جالب اینکه کولموگروف هم، چنینعلایقی داشت.مارکوف پسری به اسم خودش داشت که در ۹ سپتامبر ۱۹۰۳ به دنیا آمد و راه پدرش را ادامه داد

ان سان به علت توانایی در ک شف تمام رموز عالم وعدم اطمینان در برابرحوادث روزگار مجبور ا ست مفاهیمی از قبیل تصـــادف وشـــانس رابه عنوان پاره ای از زندگی روزانه بپذیرد .با این حال دانشـــمندان همواره تلاش کرده اند تا از راه تجزیه و مشـــاهده به کمک علم وتکنولوژی تا آنجا که مقدور اســـت علت پدیده ها را کشـــف نمایند وعدم اطمینان را کاهش دهند برای اولین باریکی ازاشراف زادگان و قمار بازان معروف فرانسه ،برای توضیح علت بردوباخت با تاس تخته نردبه دو ریا ضیدان مشهور فرانسوی پا سکال (۱۶۶۲-۱۶۲۳)وفرما (۱۶۶۵-۱۶۰۱)متو سل گردید.مسائلی راکه آنها حل کردندمدتها به راههای مختلف توجیه وتفســـیرشـــدناگفته نماندکه قبل ازآنهادودانشـــمندایتالیایی،کاردان (۱۵۷۶-۱۵۰۱)و گالیله (۱۶۴۲-۱۵۶۴) دراین زمینه محاســـبات گو ناگون انجام داده بودند، که موردتو جه قمار بازان آن زمان درایتالیا قرارگرفت.بنابراین ازنظر تاریخی تئوری احتمال ازبازیهای قماردراوائل قرن هفدهم شـــروع شـــدورفته ر شدنمودودرر شته های مختلف نفوذکرد.در سال ۱۹۳۳ کولموگروف ریا ضیدان رو سی(۱۹۸۷-۱۹۰۳)،ر ساله ای درباره ا صول احتمال منت شرکرد،وبه احتمال کاملا جنبه ریا ضی داد.امروزاحتمال درعلوم ،مهند سی ،علوم اجتماعی ،علوم

قضـــایی،پزشـــکی ،بازاریابی وغیره وســـیله مهمی برای تجزیه وتحلیل پدیده ها اســـت.درتئوری احتمال واژه هایی مانندآزمایش ،پیشامدوغیره را که اززبان عادی گرفته شده اندبه کارمی برند.بایدنخست این واژه ها رادقیقابدون ابهام روشن نمودتابتوان تئوری رابااسلوب ریاضی پایه گذاری کرد

آزمایش تصادفی

هرعملی راکه تصادف درآن دخالت داشته باشد در اصطلاح تئوری احتمال،آزمایش تصادفی می گویند.دقیقا آزمایش تصادفی عبارت است ازعملی که تحت شرایطی ثابت وبرحسب موضوعی مورد علاقه ،هربارکه تکرارشود،منجربه یکی ازاعضا مجموعه ناتهی S گردد مجموعه S متشکل ازتمام نتیجه هایی که تحت شرایط آزمایش وبرحسب موضوع مورد علاقه قابل تصوراست .

پدیده هایی که نمی توان نتیجه آنها را پیش ازرخ دادن بطور قطع معلوم کرد ،پدیده های تصادفی می نامیم .

متغییری را تصادفی گوییم،هرگاه در شرایط یکسان مقدار آن از قبل قابل پیش بینی نباشد.

۱.کدام یک ازمتغییر های زیر تصادفی نیست ؟

الف)تعداد اتومبیل هایی که در فاصله ساعت ۷الی ۸از جلوی مدرسه عبور می کنند .

ب)تعداد دانش آموزان چپ دست یک دبیرستان .

ج)علامت مشاهده شده پس از پرتاب یک تاس .

د)میانگین طول قد دانش آموزان یک کلاس.

پدیده هایی که نتیجه آنها را پیش از رخ دادن بتوان بطور قطع تعیین کرد ،پدیده های قطعی می نامیم

مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه آن آزمایش تصادفی می نامند .وبا Sنمایش میدهند .

به هریک ازنتایج (یعنی به هریک از اعضای فضای نمونه) یک برآمد می گویند .

هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد از آن فضا می نامیم .

اگر پیشامد تک عضوی باشد ،آن را پیشامد ساده ،اگر تهی باشد آنرا پیشامد محال واگر پیشامد همه فضای نمونه باشد آنرا پیشامد حتمی می نامند

:

اگر S مجموعه ای n عضوی باشد ، 2^n پیشامد روی آن قابل تعریف خواهد بود .

تست:اگر s={a,1,b,5} یک فضای نمونه ای و A={b,1} یک پیشامد ،ونتیجه آزمایش b، باشد آن گاه :

الف)A رخ داده است ب) A رخ نداده است ج){b} یک پیشامد حتمی است د){1} ناممکن است

تست:در پرتاب یک سکه ویک تاس چند پیشامد مختلف را می توان تصور کرد ؟

الف) 2^8 **ب)** 2^8-1 **ج)** 2^{12} **د)** $2^{12}-1$

تست:درکیسه ای ۳توپ قرمزو۴توپ آبی وجود دارد. یک توپ به تصادف ازآن خارج کرده فضای نمونه ای این آزمایش (به هنگام انتخاب توپ دوم) چند عضو دارد ؟

الف) ۶ ب)۷ ج)۲۱ د)۱۲

تمرین :درپرتاب یک سکه اگر شیر بیاید آنگاه تاس را می ریزیم واگر خط بیاید ،سکه را ۲بار دیگر پرتاب می کنیم ،هرگاه A را پیشامد ((حداقل ۲ بار ظاهر شدن خط)) وB را پیشامد((حداکثر ۲ بار ظاهر شدن خط))در نظر بگیریم Aو B را با عضو هایشان معلوم کنید .

تمرین : کیسه ای شامل ۴ توپ قرمز ۲توپ آبی و۳توپ زرد است ، ازاین کیسه ۳ توپ همزمان خارج می کنیم .فضای نمونه چند عضوی است؟ هریک از پیشامد های زیر را معلوم کنید:

A :پیشامد ۲ مهره ابی بودن . **B :پیشامد همرنگ بودن مهره های خارج شده**

C :پیشامد فقط یک مهره زرد بودن **D :یشامد حداقل ۲ مهره قرمز بودن**

تعداد برآمدهای فضای نمونه ممکن است (متناهی)یا (نامتناهی شمارا)ویا (نامتناهی ناشمارا)باشد **.**

به عنوان مثال: اگر لامپی را از تولیدات یک کارخانه لامپ سازی انتخاب کنیم و بخواهیم سالم بودن آنرا امتحان کنیم فضای نمونه متناهی و دو برآمد دارد .

اگر سکه ای را آنقدر پرتاب کنیم که برای اولین بار شیر بیاید فضای نمونه این آزمایش تصادفی ،بی نهایت برآمد دارد که می توان برآمد ها را با اعداد طبیعی متناظر کرد .(نامتناهی شمارا)

اگر بخواهیم نقطه ای به تصادف از بازه (۱و۰) انتخاب کنیم فضای نمونه ای ناشمارای نامتناهی خواهد بود.

تمرین: فضای نمونه ای در آزمایش ((انتخاب ۲ توپ از میان ۳ توپ سفید متمایز و ۶ توپ قرمز متمایز چند عضو دارد؟

تست :یک تاس را پرتاب می کنیم و سپس به تعداد عدد رو شده سکه پرتاب می کنیم فضای نمونه ای این آزمایش چند عضوی است؟

الف)۲۱ ب) ۴۲ ج)۱۲۶ د)۱۲۸

تست :در پرتاب دو تاس ،´A پیش آمد ((رخ دادن عدد اول در دست کم یکی از تاس ها))است . حاصل آزمایش کدام یک از گزینه های زیر باشد تا بگوییم A رخ نداده است؟

الف)(۳و۲) ب) (۶و۱) ج) (۴و۳) د) (۶و۲)

«اعمال مجموعه ای روی پیشامد ها »

از آنجایی که هر پیشامد زیر مجموعه ای ازمجموعه فضای نمونه است، همه اعمال روی مجموعه ها ،روی پیشامد ها قابل تعریف است .

A یعنی A اتفاق نیفتد .

BUA یعنی A اتفاق بیافتد یا B اتفاق بیافتد ، (حداقل یکی اتفاق بیافتد)

A∩B یعنی A وB هردو باهم اتفاق بیافتند .

A-B یعنی A اتفاق بیافتد اما B اتفاق نیافتد .

$A\Delta B$ یعنی فقط A یا فقط B (دقیقا یکی از دو پیشامدهای A یا B) اتفاق بیفتد .

$A \subseteq B$ یعنی اگر A اتفاق بیافتد ، حتما B هم اتفاق خواهد افتاد

تست :در نمودار ون شکل زیر بخش هاشور خورده بیانگر کدام پیشامد است ؟

الف)پیشامد A یا C بوقوع پیوسته

ب) پیشامد A و C بوقوع پیوسته و B اتفاق نیافتاده .

ج)فقط C یا فقط A اتفاق افتاده

د) A یا C اتفاق افتاده اند اما B اتفاق نیافتاده .

تمرین :ازبین افراد یک کشور فردی را انتخاب می کنیم .اگر A پیشامد مرد بودن و B پیشامد زن بودن و C پیشامد متاهل بودن فرد باشد ، نمودار ون این پیشامد ها را رسم کنید.

هرگاه S فضای نمونه یک آزمایش تصادفی باشد که اعضاء آن هم‌شانس هستند .اگر A پیشامدی ازاین فضای نمونه باشد،آنگاه احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد P(A) نمایش داده وبصورت زیر محاسبه می گردد

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

تمرین:کامپیوتری عددی سه رقمی به طورتصادفی انتخاب می کند.احتمال اینکه این عدد مضرب ۲۵ باشدچقدراست ؟

تمرین:۵کتاب در یک کتابخانه که دارای ۲ردیف می باشد،به طور دلخواه قرار داده می شوند. احتمال اینکه ۲ کتاب خاص پهلوی هم باشند چقدر است؟

تمرین:اگر با ارقام ۰،۱،۲،۳،۴ یک عدد پنج رقمی به صورت تصادفی بسازیم احتمال اینکه این عدد بر ۳ بخش پذیر باشد چقدر است ؟

تمرین:یک سکه ویک تاس را باهم پرتاب می کنیم احتمال اینکه (تاس بیشتر از ۲ نیاید)چقدر است؟

تمرین:درجعبه ای ۳ مهره سفید ، ۴ مهره قرمز وپنج مهره سیاه وجود دارد. ازاین جعبه ۳مهره متوالیا وبدون جایگذاری بیرون می آوریم .احتمال اینکه مهره اول سفید،مهره دوم قرمز ومهره سوم سیاه باشد چقدر است؟

تمرین :ازبین ۵جفت کفش متمایز ۳لنگه کفش به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آن که دو لنگه آن از یک جفت کفش باشند چقدر است؟

تست : یک فضای نمونه هم شانس دارای ۶ عضو است . چند پیشامد با احتمال وقوع بزرگتر از $\frac{1}{3}$ وجود دارد؟

الف)۲۲ ب) ۴۲ ج)۵۷ د)۶۴

تست: در کیف پول یک مهندس ۵ اسکناس ۱۰۰۰ تومانی و ۲ اسکناس ۵۰۰ تومانی وجود دارد اگر این شخص ۲ اسکناس از کیف پولش بیرون بیاورد با کدام احتمال ۱۵۰۰ تومان پول در دست دارد؟

الف) $\frac{10}{21}$ ب) $\frac{11}{21}$ چ) $\frac{12}{21}$ د) $\frac{13}{21}$

تمرین: روی ۱۰ کارت اعداد ۱تا ۱۰ را نوشته ایم ، کارت ها را برگردانده طوری که اعداد روی آنها قابل مشاهده نباشد . سپس سه کارت به تصادف انتخاب میکنیم چقدر احتمال دارد اعداد انتخاب شده دنباله حسابی ساخته باشند.

تست:یک جفت تاس مخصوص داریم که در هرکدام از آن ها به جای ارقام ۱تا۶ ،دو عدد ۱،دو عدد ۲ودو عدد۳ نمایش داده است .این تاس را باهم می اندازیم . احتمال این که مجموع ارقام دو تاس عدد ۵باشد کدام است؟

الف) ۲۲/. ب)۳۳/. ج)۴۴/. د)۵۵/.

تست: علی ،کامران ،مرتضی ،ومحسن قرار می گذارند که در یک بازی به ترتیب یک تاس را پرتاب کنند وهر کدام از آن ها که برای اولین بار عدد ۶ بیاورد، برنده خواهد شد احتمال این که علی برنده شود چقدر است؟

الف) $\frac{216}{671}$ ب) $\frac{6}{1296}$ ج) $\frac{5}{216}$ د) $\frac{1}{6}$

تست: ازبین ۶ داوطلب گروه ریاضی و۴ داوطلب گروه تجربی ،به طور تصادفی ۴ داوطلب انتخاب می شوند .با کدام احتمال دو نفر آنان از گروه ریاضی هستند ؟الف) $\frac{5}{21}$ **ب)** $\frac{5}{14}$ **ج)** $\frac{4}{7}$

د) $\frac{3}{7}$

تخصیص احتمال

تمام مثال های بالا درباره احتمال پیشامد ها در فضای نمونه ای هم شانس بود. اگر فضای نمونه ای هم شانس نباشد ، یعنی شانس رخ دادن برآمدهای آن یکسان نباشد ، چگونه می توان احتمال پیشامدها را حساب کرد؟

مثال :فرض کنید یک تاس ناهمگن بگونه ای ساخته شده که ظاهر شدن اعداد زوج هم شانس ،همچنین ظاهر شدن اعداد فرد نیز هم شانس ،اما شانس آمدن عدد زوج دو برابر آمدن عدد فرد باشد ، چقدر احتمال دارد عدد برزمین نشسته زوج باشد ؟

اگر $s=\{s_1,s_2,s_3,\ldots\}$ **یک فضای نمونه گسسته باشد.دنباله اعداد S را یک تخصیص احتمال گوییم هرگاه دارای دو ویژگی زیر باشند.**

الف) برای هر $i\ge 1, s_i\ge 0$ **ب)** $1=s_1+s_2+s_3+\ldots$

به زبان ساده تر در هر فضای نمونه ، احتمال هر عضو (برآمد)همیشه عددی مثبت بین صفرویک همچنین مجموع احتمال هر عضو عدد یک است.

تست : کدام یک از مجموعه اعداد زیر یک تخصیص احتمال (برای یک فضای نمونه مناسب) تشکیل می دهند؟

الف) $s_1=\frac{1}{2},s_2=\frac{1}{3},s_3=\frac{1}{4}$ **ب)** $s_1=-./4, s_2=./6, s_3=./8$

ج) $s_1=./2, s_2=./3, s_3=./5$ **د)** $s_1=./2, s_2=./5, s_3=./7$

تمرین:یک تاس در پرتاب خود طوری سنگینی میکند که احتمال ظاهر شدن هر عدد با توان دوم همان عدد متناسب است ،با این فرض احتمال ظاهر شدن هر عدد را بدست آورید؟

تمرین:تاس همگنی را آنقدر پرتاب می کنیم تا شش بیاید فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را بنویسید . چگونه می توانید به این فضا یک تخصیص احتمال نسبت دهید ؟به کمک این تخصیص ، احتمال اینکه عدد ۶ در دفعه با شماره زوج بیاید را بنویسید .

تمرین:اگر $s = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ یک تخصیص احتمال باشد آیا مجموعه $\{{s_1}^2, {s_2}^2, {s_3}^2, \ldots\}$ نیز یک تخصیص احتمال است ؟ اگر آری چرا واگر نه مثال نقض بیاورید.

تمرین: فرض کنید دومجموعه ی اعداد $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}, \{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n\}$ تخصیص احتمال باشند ثابت کنید اعداد : $\{p_i \times q_j : i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ \mathrm{j} = 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{m}\}$ نیز تخصیص احتمال هستند.

اصول موضوع وقوانین احتمال

در نظریه ی احتمال (ودر واقع درهر نظریه ی دیگری) اثباتها در چارچوب روش اصل موضوعی انجام می شوند .در این روش اگر بخواهیم شخص عاقلی را متقاعد کنیم که گزاره l_1 درست است ،به او نشان می دهیم که چگونه l_2 را با استدلال منطقی از گزاره l_3 نتیجه می شوند .اگر l_3 راهم نپذیرفت ،باید این کار را آنقدر تکرار کنیم تا به گزاره برسیم که بدون استدلال برای او پذیرفتنی باشد .به این ترتیب این گزاره مبنای استدلال ما قرار خواهد گرفت . بنابراین در روش اصل موضوعی ابتدا چند گزاره ساده که در صحت آنها شکی نیست واحتیاج به استدلال ندارد انتخاب می کنیم . اینها اصول موضوع نظریه هستند . آنگاه برسر اینکه چه وقت وچگونه یک گزاره نتیجه منطقی گزاره دیگر است توافق

می کنیم و در نهایت با استفاده از اصطلاحاتی که معنای آنها قبلا روشن شده است ،تعریفها واصول موضوع ،نتایج جدید را بدست می آوریم .نتایجی که بدین ترتیب بدست می آیند ،قضییه نامیده می شوند. قضییه ها گزاره هایی هستند که باید ثابت شوند وپس از اثبات برای یافتن قضییه های دیگر به کار می روند وبدین سان نظریه شکل می گیرد.

اصول موضوع نظریه احتمال

I -برای هر پیشامد A ، $p(\mathrm{A}) \geq 0$

II - $p(\mathrm{s}) = 1$

III -اگر A_1, A_2 دو پیشامد جدا ازهم باشند ،یعنی همزمان رخ ندهند آنگاه :

$$p(\mathrm{A}_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2)$$

قضییه: $p(\varnothing) = 0$ اثبات:

قضییه:اگر Aو B دوپیشامد باشند که $A \subseteq B$ آنگاه: $p(A) \leq p(B)$ اثبات :

قضییه: برای هر دو پیشامد Aو B داریم $p(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = \mathrm{p(B)} - \mathrm{p(A \cap B)}$

اثبات:

قضییه :برای هر دو پیشامد A وB داریم: $p(A\cup B)=p(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اثبات:

قضییه:برای هرپیشامد Aاز فضای نمونه ای : $p(A)+P(A^{/})=1$

اثبات:

قضییه:اگر A یک پیشامد ،دلخواه از فضای نمونه ی S باشد : $0\le P(\mathrm{A})\le 1$

اثبات:

تمرین:

۱.احتمال قبولی کامران در کنکور ۸/.واحتمال قبولی مهران ۹/. است .احتمال قبولی هردو چقدر است؟

۲.هرگاه حاصل $P(\mathrm{A}-\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}).\mathrm{P}(\mathrm{B})$ $P(A^{/}\cup B^{/})=./61, P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=./39$ **چقدر است؟**

۳. احتمال اینکه مردی سکته ی قلبی کند ۸/. واحتمال اینکه سکته مغزی کند۵/.

است اگر احتمال اینکه فقط یکی از این دو سکه را بزند ۹/.باشد چقدر احتمال دارد اوهر دو سکته را باهم بزند ؟

۴.اگر $P(A^{\prime})=\frac{1}{2}$ و $P(B^{\prime})=\frac{1}{3}$ باشد .بیشترین مقدار $P(A\cup B)$ چند برابر کمترین مقدار آن است؟

۵. احتمال اینکه از بین ۷نفر،روز تولد هیج دو نفری یک روز نباشد چقدر است؟

۶.احتمال اینکه دریک سال کبیسه دقیقا ۵۲ یکشنبه داشته باشیم ، کدام است ؟

الف) $\frac{2}{7}$ ب) $\frac{3}{7}$ ج) $\frac{5}{7}$ د)۱

۷. تیراندازهای AوB به احتمال $\frac{1}{4}$ به هدف می زنند .اگر A شروع به تیر اندازی کند ،احتمال اینکه قبل از B به هدف بزند کدام است ؟ (تیر اندازها یک درمیان شلیک می کنند.)

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{4}{7}$ ج) $\frac{5}{8}$ د) $\frac{5}{9}$

۸.نام ماههای سال را جداگانه روی کارت هایی می نویسیم وآن ها را بطور تصادفی روی میز قرار می دهیم احتمال اینکه بین کارت های فروردین و اردیبهشت ، دقیقا چهار کارت قرار کرفته باشد کدام است ؟

د) $\frac{13}{132}$ الف) $\frac{1}{11}$ ب) $\frac{4}{33}$ ج) $\frac{7}{66}$

۹.اگر احتمال چشم آبی شدن دختر $\frac{1}{8}$ واحتمال آبی شدن پسر $\frac{3}{8}$ باشد ، احتمال اینکه هر دو فرزند یک خانواده ، چشم آبی نباشند چقدر است ؟

الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{9}{16}$ ج) $\frac{12}{16}$ د) $\frac{15}{16}$

پیشامد های مستقل وناسازگار

مستقل:هرگاه رخ دادن پیشامد B هیچ گونه تاثیری در وقوع یا عدم وقوع پیشامد دیگری مانند A نداشته باشد می گوییم AوB مستقلند .مثلا اگر ابتدا یک سکه وسپس یک تاس را پرتاب کنیم ،نتیجه ی این دو آزمایش کاملا از هم مستقل است. یعنی شیر آمدن یا خط آمدن سکه هیچ تاثیری روی شماره ای که قرار است برای تاس رو شود ندارد.

دوپیشامد AوB را مستقل گویند هرگاه :
$$\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(A) \times p(\mathrm{B})$$

یادداشت...

....

دو پیشامد را که مستقل نباشند ((نامستقل)) یا وابسته گویند بعبارت دیگر اگر برای دو پیشامد مانند AوB داشته باشیم $\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \neq p(A) \times p(\mathrm{B})$ آنگاه AوB را نامستقل می نامیم .

دوپیشامدA وB را ناسازگار گویند هرگاه هر دو همزمان نتوانند اتفاق بیفتند. یعنی اشتراکشان تهی باشد .

AوB ناسازگارند $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

AوBناسازگارند $\Leftrightarrow p(A \cap B) = 0$

دوپیشامد ناسازگار زمانی مستقلند که داشته

باشیم: $p(A) \times p(B) = 0$ یعنی $P(A) = 0$ یا $p(B) = 0$ بعبارت دیگر باید لااقل یکی از دوپیشامد نشدنی باشند

اگر دوپیشامد غیر تهی Aو B ناسازگار باشند آنگاه مستقل نیستند یعنی:

Aو B ناسازگارند $\longleftarrow$ Aو B مستقل نیستند .

$$A\cap B\neq\varnothing \longleftarrow p(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$$

اگر دو پیشامد غیر تهی Aو B مستقل باشند نمی توانند ناسازگار باشند (یعنی باید سازگار باشند)

$$p(A\cap B)=p(A)_{\geq 0}\times p(B)_{\geq 0}\rightarrow p(A\cap B)\geq 0\rightarrow p(A\cap B)\neq 0\rightarrow A\cap B\neq\varnothing\rightarrow$$

ناسازگار نیستند.

یادداشت

....

....

....

مثال هایی برای پیشامدهای مستقل:امتحان دادن یا مسابقه ی ورزشی بین چند نفر،پرتاب چند تاس باهم، پرتاب چند سکه باهم ،چند تاس وچندین سکه باهم ،جنسیت فرزندان یک خانواده باهم ، زنده ماندن ومردن افراد،روز تولد چند نفر باهم و...

تمرین: آیا زیر مجموعه های دو پیشامد مستقل بازهم مستقل از هم هستند؟ در مورد پیشامد های ناسازگار چطور ؟ اگر جواب بلی است ثابت کنید در غیر اینصورت مثال نقض ارائه دهید؟

تمرین:درریختن یک تاس ،پیشامدA روشدناعدادزوج،پیشامدB روشدن اعدادفردوپیشامدc روشدن اعداداول است.کدام گزینه در مورد درمورد پیشامدهادرست است؟

الف)پیشامدهای A و B سازگار و پیشامد A و C مستقل هستند.

ب) پیشامد A و C سازگارو پیشامدهای A و B مستقل هستند.

ج) پیشامدهای A و B ناسازگاروپیشامدهای A و C وابسته اند .

د)پیشامدهای A و C سازگار وپیشامدهای C و B مستقل هستند.

تمرین: احتمال این که شخصی گروه خونی A^+ داشته باشد.۲۰./. واحتمال اینکه او ناراحتی قلبی داشته باشد۲۵./. است چقدر احتمال دارد این شخص هم ناراحتی قلبی داشته باشد وهم گروه خونی او A^+ باشد؟

تمرین)اگر A و B پیشامد های مستقل باشند ثابت کنید: A' و A_B' و B'_A' و B دوبدو مستقلند.

ازتمرین قبل می توان نتیجه گرفت اگر A و B پیشامد های مستقل باشندآنگاه:

حداقل یکی ازپیشامدهای A و B اتفاق بیافتد : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A)\times p(B)$

نه A اتفاق بیافتد ونه B اتفاق بیافتد : $p(A'\cap B')=p(A')\times p(B')=(1-p(A))\times(1-p(B))$

A اتفاق بیافتد ولی B اتفاق نیافتد : $p(A-B)=p(A\cap B')=p(A)\times p(B')=p(A)\times(1-p(B)$

B اتفاق بیافتدولی A اتفاق نیافتد: $p(B-A)=p(B\cap A')=p(B)\times p(A')=p(B)\times(1-p(A)$

فقط یکی از A و B اتفاق بیفتد: $p(A\Delta B)=p(A)\times(1-p(B))=p(B)\times(1-p(A))$

یادداشت..

....

....

تمرین: ده درصد از بیماران تحت جراحی یک پزشک معروف می میرند. سه بیمار در نوبت جراحی این پزشک هستند احتمال این که حداقل یکی از آن ها بعد از عمل جراحی زنده نماند چه قدر است ؟

الف)۰/۷۲۹　　ب)۰/۲۷۱　　ج)۰/۲۲　　د) ۰/۷

تمرین: دریک جمع که ۴۵ پسر و۶۰ دختر حضور دارند، x پسرو y دختر دانشجو هستند. یک نفر از این جمع انتخاب می کنیم .فرض کنید A پیشامد پسر بودن این شخص وB پیشامد دانشجو بودنش باشد . اگر AوB مستقل باشند .تعداد پسران دانشجو کدام است؟

الف)۲۹　　ب) ۴۰　　ج)۳۸　　د)۳۵

تمرین:احتمال اینکه فقط یکی از دو پیشامد مستقل وهم شانس AوB اتفاق بیفتد $\frac{4}{9}$ است . حداکثر مقدار احتمال این که حداقل یکی از این دو پیشامد واقع شود ،کدام است؟

الف) $\frac{7}{9}$　　**ب)** $\frac{8}{9}$　　**ج)** $\frac{9}{10}$　　**د)** $\frac{8}{10}$

۱. ۱)یک سکه سالم را ۱۰۰ بار انداخته ایم پشت آمده است احتمال آنکه در صدو یکمین بار نیز پشت بیاید چقدر است؟

۲) یک سکه سالم را ۱۰۰ بار انداخته ایم احتمال اینکه در هر صد بار پشت بیاید چقدر است؟

۳) ظرف A شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ظرف B شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است از هر ظرف مهره ای به تصادف خارج میکنیم . احتمال اینکه از ظرف A سفید واز ظرف B سیاه بیرون آمده باشد چقدر است؟

۴)کدام بیان در مورد پدیده غیر ممکن نادرست است؟

مکمل پدیده قطعی　　خارج فضای نمونه است　　با احتمال وقوع صفر　　با احتمال کمتر $\frac{1}{2}$

۵)ظرفی شامل تعدادی مهره سیاه وسفید می باشد . دو مهره از این ظرف به تصادف بیرون می آوریم اگر احتمال هم رنگ بودن این دو مهره $\frac{1}{2}$ باشد تعداد مهره های سفید چند تا است به شرط آنکه بدانیم ۶ مهره سیاه در ظرف وجود دارد؟

۶) در یک سبد ۷ گوی یکسان از ۱ تا ۷ شماره گذاری شده است ۴ گوی به تصادف و بدون جایگذاری بیرون می آوریم احتمال اینکه دومین عدد بزگتر بین ۴ توپ انتخابی ۵ باشد چقدر است؟

۷)اگر احتمال چشم آبی شدن دختر $\frac{1}{8}$ و احتمال چشم آبی شدن پسر $\frac{3}{8}$ باشد احتمال آنکه هردو فرزند یک خانواده چشم آبی نباشندچقدر است؟

۸)احتمال اینکه در یک سال کبیسه دقیقا ۵۲ یکشنبه داشته باشیم چقدر است؟

۹)تیر اندازهای A ,B به احتمال $\frac{1}{4}$ به هدف می زنند اگرA شروع به تیراندازی کند احتمال اینکه قبل از B به هدف بزند کدام است؟ (یک در میان شلیک می کنند.)

۱۰)از میان ۳ زن و۷ مرد می خواهیم یک گروه ۳ نفری انتخاب کنیم احتمال اینکه هیچ دو زنی در گروه نباشند چقدر است؟

۱۱)سه نفر اسامی خود را روی کارتهایی نوشته و داخل کیسه ای می اندازند سپس هرکدام یک کارت خارج می کنند احتمال اینکه هیچ کس اسم خود را بیرون نیاورد چقدر است؟

۱۲)سکه ای را پرتاب می کنیم اگر رو بیاید تاس را می ریزیم .اگر پشت بیاید سه سکه دیگر را باهم پرتاب می کنیم.در این آزمایش احتمال این که دقیقا یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

۱۳) در یک فضای نمونه همشانس که دارای ۶ عضو است چند پیش آمد با احتمال وقوع بزرگتر از $\frac{1}{3}$ وجود دارد؟

۱۴) اگر $p(A-B)=\frac{1}{4}, p(B-A)=\frac{2}{7}$ باشند حداکثر مقدار $\frac{p(A)}{P(B)}$ را بدست آورید.

۱۵)اگر $p(B)=\frac{2}{3}, p(A' \cup B')=\frac{6}{7}$ باشد احتمال اینکه پیشامد رخ دهد ولی رخ ندهد چقدر است؟

۱۶)تاسی را ۵ بار پرتاب می کنیم احتمال اینکه دقیقا ۳ بار ۶ بیاید چقدر است؟

۱۷) درکیسه ای a مهره سفید و b مهره سیاه وجود دارد ۲ مهره متوالی بدون جایگذاری خارج می کنیم ثابت کنید احتمال اینکه مهره دوم سفید باشد برابر است با : $\frac{a}{a+b}$

۱۸) در استان خوزستان ۲۵ درصد جرائم در روز و ۸۰ درصد جرائم در شهر اتفاق می افتد و ۱۰ درصد جرائم در خارج از شهر ودر طول روز ،چند درصد از جرائم داخل شهر ودر شب صورت می گیرند؟

۱۹) در فضای نمونه ی هم شانس {a,b,c,d}پیشامدی بنویسید که با {a,c} مستقل باشد اما با{b,c} وابسته

.

۲۰)در یک جمع ۳۰مرد و ۴۵ زن حضور دارند. در بین آن ها مرد و زن استقلالی اند یک نفر به تصادف انتخاب می کنیم فرض کنیدA پیشامد مرد بودن و Bپیشامد استقلالی بودن این فرد باشد ثابت کنیداگر ۲Y=۳x آنگاه AوB مستقلند.